Επίσης, έλεγχος:

$$\lim_{z\to -2i} \frac{f(z)-f(-2i)}{z-(-2i)} = \lim_{z\to -2i} \frac{\frac{2z\bar{z}+iz}{1+z\bar{z}}-2}{z+2i} = \lim_{z\to -2i} \frac{2z\bar{z}+iz-2-2z\bar{z}}{(z+2i)(1+z\bar{z})} =$$

$$= \lim_{z\to -2i} \frac{iz-2}{(z+2i)(1+z\bar{z})} = \lim_{z\to -2i} \frac{i\cancel{(z+2i)}}{\cancel{(z+2i)}(1+z\bar{z})} = \frac{i}{5}.$$

Συνέχεια θεωρίας για την εκθετική

$z = x+iy$

$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ ①

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = 1+\frac{iy}{1!}+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\frac{(iy)^4}{4!}+\dots =$$

$$= 1+iy-\frac{y^2}{2!}-i\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\dots =$$

ανάπτυγμα ημιτόνου / Ανάπτυγμα συνημιτόνου

$$= \left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\dots\right)+i\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\dots\right) =$$

$= \sigma\upsilon\nu y + i\,\eta\mu y$

Τότε, ①: $e^x \cdot e^{iy} = z = e^x \cdot (\sigma\upsilon\nu y + i\,\eta\mu y)$ Τύπος Euler

Δηλ. $|z| = e^x$ και $\arg e^z = y$

Επίσης $e^{z+2k\pi i} = e^z \cdot e^{2k\pi i} = e^z(\sigma\upsilon\nu(2k\pi)+i\,\eta\mu(2k\pi)) = e^z$

Δηλ, η e^z είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2π

(πληρείται ο ορισμός $\varphi(x+z) = \varphi(x)$)

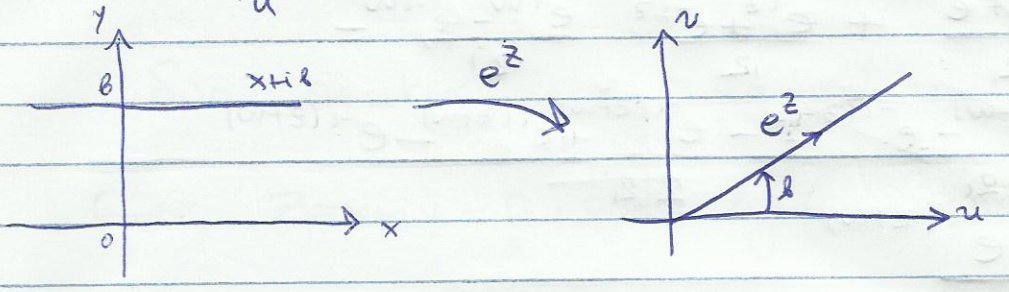
Ισότητα του Θεού:

$e^{i\pi} = \sigma\upsilon\nu\pi + i\,\eta\mu\pi = -1 \Rightarrow \boxed{e^{i\pi}+1=0}$

• Εαν εχω $z = x + i\beta$, $\beta = \sigma\tau\alpha\theta$

$$e^{x+i\beta} = e^x(\sigma\upsilon\nu\beta + i\,\eta\mu\beta) = \underbrace{e^x\sigma\upsilon\nu\beta}_{u} + i\underbrace{e^x\eta\mu\beta}_{v}$$

Ετσι, $\frac{v}{u} = \varepsilon\varphi\beta \leadsto v = u\cdot\varepsilon\varphi\beta = \lambda u$

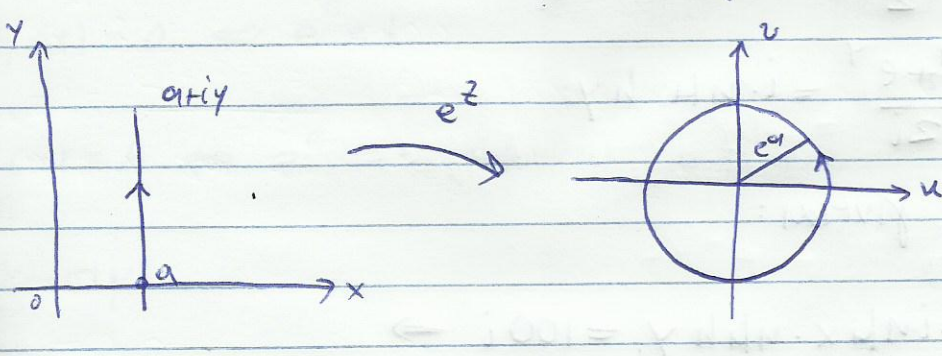


• Εαν εχω $z = \alpha + iy$, $\alpha = \sigma\tau\alpha\theta$

$$e^{\alpha+iy} = e^{\alpha}\cdot e^{iy} = \underbrace{e^{\alpha}\sigma\upsilon\nu y}_{u} + i\underbrace{e^{\alpha}\cdot\eta\mu y}_{v}$$

Ετσι, $u^2 + v^2 = e^{2\alpha}$

$\leadsto |e^z| = e^{\alpha}$ τα σημεια που ικανοποιουν την εξισωση αυτή ειναι ο κυκλος με κεντρο Κ και ακτινα $\rho = e^{\alpha}$



$0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Περισσοτερη μελετη:

$$e^{iy} = \sigma\upsilon\nu y + i\,\eta\mu y$$
$$\oplus\quad e^{-iy} = \sigma\upsilon\nu y - i\,\eta\mu y$$

$\sigma\upsilon\nu y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$ και $\eta\mu y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$

Ετσι, οριζουμε $\eta\mu z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ & $\sigma\upsilon\nu z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$|| \qquad\qquad ||$

$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{3!} - \dots \qquad 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$

Έτσι, έχουμε για τις μιγαδικές μεταβλητές

$$ημ(z+w) = ημz \cdot συνw + συνz \cdot ημw =$$

$$= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} =$$

$$= \frac{e^{i(z+w)} \cancel{+e^{i(z-w)}} \cancel{-e^{-i(z-w)}} - e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2 \cdot 2i}$$

$$= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i}$$

Πχ

$$συν z = 100i \Rightarrow συν(x+iy) = 100i \Rightarrow συνx \cdot συν(iy) - ημx\, ημ(iy) = 100i \quad ①$$

$$συν(iy) = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = συνh\, y$$

$$ημ(iy) = \frac{-e^{-y}+e^{y}}{2i} = i \cdot ημh\, y$$

Άρα, η ① γίνεται:

$$συνx \cdot συνhy - iημx \cdot ημhy = 100i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -ημx \cdot ημhy = 100 \quad \text{και} \quad συνx \cdot συνhy = 0$$

- $συνx \cdot συνhy = 0 \xRightarrow{συνhy>0} συνx = 0 \Rightarrow x = kπ + \frac{π}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

- $-ημ(kπ+\frac{π}{2}) \cdot ημhy = 100 \Rightarrow (-1)^{k+1} \cdot ημhy = 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow ημhy = (-1)^{k+1} \cdot 100 \Rightarrow \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = (-1)^{k+1} \cdot 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow e^{y} - e^{-y} = 200(-1)^{k+1} \Rightarrow (e^{y})^2 - 1 = 200(-1)^{k+1} \cdot e^{y} \Rightarrow$
$\xRightarrow{e^{y}=λ} λ^2 - 200(-1)^{k+1} \cdot λ - 1 = 0 \Rightarrow$ έχω πραγματικές λύσεις διότι $Δ>0$ με μια αρνητική & μια θετική

Για να βρω τα θετικά $\lambda_1 = \lambda = \frac{100(-1)^{k+1} \pm \sqrt{10000+1}}{1} = 100(-1)^{k+1} \pm \sqrt{10001}$

$k = 2p \rightsquigarrow \lambda_1 = -100 + \sqrt{10001} > 0$
$k = 2p+1 \rightsquigarrow \lambda_1' = 100 + \sqrt{10001} > 0$

δύο θετικές και $\lambda_1 = \lambda = e^y \Rightarrow y = \log \lambda_1$

Έτσι, $z_1 = x+iy = \frac{\pi}{2} + 2\nu\pi + \log(-100 + \sqrt{10001})$, $\nu \in \mathbb{Z}$

$z_2 = x+iy = \frac{\pi}{2} + (2\nu+1)\pi + \log(100 + \sqrt{10001})$, $\nu \in \mathbb{Z}$

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ:

$\log(\alpha) = b \Leftrightarrow e^b = \alpha$

$\log(1) = 0 \Leftrightarrow e^0 = 1$

$\log(-1) = b \Leftrightarrow e^b = -1$ Αδύνατη στο $\mathbb{R}$

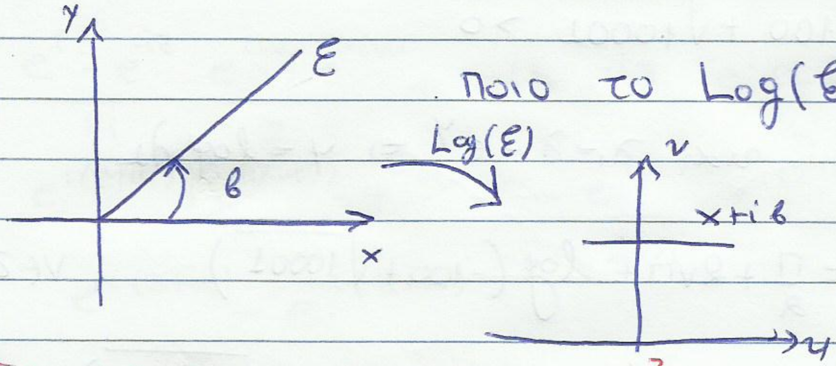
Γενικεύουμε:

$\log(z) = w \Leftrightarrow e^w = z$, $z \neq 0$

Έστω $w = u + iv \rightsquigarrow z = e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} \Rightarrow$
$\Rightarrow |z| = e^u \cdot |e^{iv}| = e^u$
όπου $u = \log|z|$ και $v = \arg(z)$
Έτσι, $\log z = \log|z| + i \cdot \arg(z) \leftarrow$ λογάριθμος
και $\operatorname{Log} z = \log|z| + i \operatorname{Arg}(z) \leftarrow$ Βασικός (κλάδος) λογάριθμου
Έτσι, για παράδειγμα:
$\log(-1) = \log|-1| + i \arg(-1) = 0 + i(2k\pi + \pi)$
για $k=0$ θα πάρουμε το βασικό όρισμα

- $e^{Log(z)} = z \Rightarrow (log(z))' z = 1 \Rightarrow \frac{d}{dz} log(z) = \frac{1}{z}$

Εστω ε ευθεία



ποιο το $Log(\varepsilon)$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ a^z.

$\{a^z\} := e^{z\,log(a)}$ παίρνει όλες τις τιμές

$a^z := e^{z\,Log(a)}$ παίρνει μια τιμή

πχ

$i^i = e^{i\,Log(i)} = e^{i(\log|i| + i\,Arg(z))} =$

$= e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$

Επίσης:

$(a^z)' = Log(a) \cdot a^z$

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΟΡΦΗΣ x^a

$x^a := \lim (x^{r_\nu})$ με $a := \lim r_\nu$

Παράγωγος:

$(x^a)' = a x^{a-1}$

Έτσι και στους μιγαδικούς αριθμούς

τυχαίος λογαρ. του z

$$\{z^a\} := e^{a\log(z)}$$

Έτσι, $z^a = e^{a\,\mathrm{Log}(z)} \rightsquigarrow (z^a)' = e^{a\,\mathrm{Log}(z)} \cdot \frac{a}{z} = a z^{a-1}$.